

問題 1

1. 以下の問に答えよ.

- (1) ある自然数 n について, 以下の命題「 n^2 が3の倍数であるならば, n は3の倍数である」の対偶を答えよ.
- (2) ある自然数 n について, 以下の命題「 n^2 が3の倍数であるならば, n は3の倍数である」が真であることを証明せよ.
- (3) ある数 x が正の有理数であるということは, 1以外に正の公約数を持たない2つの自然数 a, b を用いて $x = \frac{a}{b}$ と表すことが出来ることと同値である. これを踏まえて $\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ.

問題 2

1. 次の問に答えよ.

- (1) ユークリッドの互除法を用いて, 3503 と 4294 の最大公約数を求めよ.
- (2) $x = \sqrt{4200n}$ が自然数となるような最小の自然数 n の値を求めよ.
- (3) 5 で割ると 1 余り, 11 で割ると 5 余るような 500 以下の整数のうち, 最大のものを求めよ.

2. ある企業は国内工場と海外工場で同一の製品を生産している. 国内工場で生産された製品には平均して 500 個中 2 個の不良品が含まれていることがわかっている. また海外工場で生産された製品には平均して 1000 個中 9 個の不良品が含まれていることもわかっている. 最終的にこの製品は国内工場で 600 個, 海外工場で 1200 個生産された. この製品について, 次の問に答えよ.

- (1) 最終的に生産された製品の中から 1 個取り出すとき, それが国内工場製でかつ不良品である確率を求めよ.
- (2) 最終的に生産された製品の中から 1 個取り出すとき, それが不良品である確率を求めよ.
- (3) 最終的に生産された製品の中から 1 個取り出したら不良品であった. その不良品が海外工場製である確率を求めよ.

問題 3

a は定数で, $0 < a < 1$ とする. 関数 $f(x) = 2x^3 - 6a^2x + \frac{1}{2}$ について, 次の問に答えよ.

- (1) 関数 $f(x)$ の増減を調べ, 極値を求めよ.
- (2) $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最大値が 1 となるように, a の値を定めよ.

模範解答

問題 1

4点・12点・12点 (28点)

(1)	n が3の倍数でないなら n^2 は3の倍数でない
(2)	<p>「n^2が3の倍数であるならば、nは3の倍数である」の対偶「nが3の倍数でないならn^2は3の倍数でない」を示すこととする。</p> <p>nが3の倍数でないとき、0以上の整数kを用いて</p> $n = 3k + 1$ <p>もしくは</p> $n = 3k + 2$ <p>と表すことが出来る。ここで$n = 3k + 1$のとき</p> $n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1$ <p>となり、この場合n^2は3の倍数ではなく、$n = 3k + 2$のとき</p> $n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4$ <p>となり、この場合もn^2は3の倍数ではない。よって題意は満たされた。</p>

(3) 背理法による証明を行う。今、 $\sqrt{3}$ は有理数であると仮定する。 $\sqrt{3} > 0$ であるため、1以外に正の公約数を持たない2つの自然数 a, b を用いて

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b} \dots \textcircled{1}$$

と表すことが出来る。①式を変形して

$$3 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\leftrightarrow 3b^2 = a^2 \dots \textcircled{2}$$

ここで a^2 は3の倍数となっているため、(1)の命題より a もまた3の倍数であることが分かる。ここで0以上の整数 k を用いて

$$a = 3k$$

と表すことが出来る。これを②式に代入すると

$$3b^2 = 9k^2$$

$$\leftrightarrow b^2 = 3k^2 \dots \textcircled{3}$$

となり、 b^2 についても3の倍数となっているため、(1)の命題より b もまた3の倍数であることが分かる。ここから a と b は1以外に公約数3を持つことがわかるが、これは仮定に反する。よって $\sqrt{3}$ は無理数である。

問題 2

1 : 6 点 × 3, 2 : 8 点 × 3 (42 点)

1.	(1)	113
	(2)	42
	(3)	456
2.	(1)	$\frac{1}{750}$
	(2)	$\frac{11}{1500}$
	(3)	$\frac{9}{11}$

問題 3

20 点 ・ 10 点 (30 点)

(1)	$x = -a$ で, 極大値 $4a^3 + \frac{1}{2}$, $x = a$ で, 極小値 $-4a^3 + \frac{1}{2}$ をとる
(2)	$a = \frac{1}{2}$