第 11 章　偏微分・全微分

> 多変数関数に関する微分を学ぶ．多変数関数において，ある特定の外生変数に関する微分，すべての外生変数に関する微分は，それぞれ，経済分析に欠かせない概念を我々に教えてくれる．

１．短期と中長期

企業の生産活動とは，生産設備等の資本と労働を投入し，生産技術を加えることで，製品を産出する活動をいう．生産活動は，資本投入量を K，労働投入量を L，製品の生産量を Y と置けば，多変数関数

$$Y = F(K, L) \tag{1}$$

として表わすことができる．関数 $F(\ ,\ )$ は生産技術（生産効率）を表現するものと考えてよい．このように投入量，生産技術，生産量との関係を表わした関数のことを生産関数と呼ぶ．

企業（メーカー）は，通常，短期的な生産計画と中長期的な生産計画をもつ．経済学において，短期とは，資本の大きさ（生産設備の規模）に変更が生じない程度の期間を，中長期とは，工場の建設等も見据えた資本の大きさも変更できる期間をさす．

中長期的な生産計画では，資本と労働はともに経営者が自由に投入量を変更できる変数である．このとき，経営者は，式(1)の生産関数に直面する．一方，短期では，たとえば，１～２年では，生産設備が大きく変更することはないが，労働者の数は，新規雇用・退職による調整，リストラによる人員削減等が可能である．つまり，企業の短期的な生産計画では，労働投入量 L のみが変数となり，資本投入量 K はパラメータ，たとえば $K = \overline{K}$ と見なされる．このとき，経営者は，式(1)に $K = \overline{K}$ を代入した

$$Y = F(\overline{K}, L) \tag{2}$$

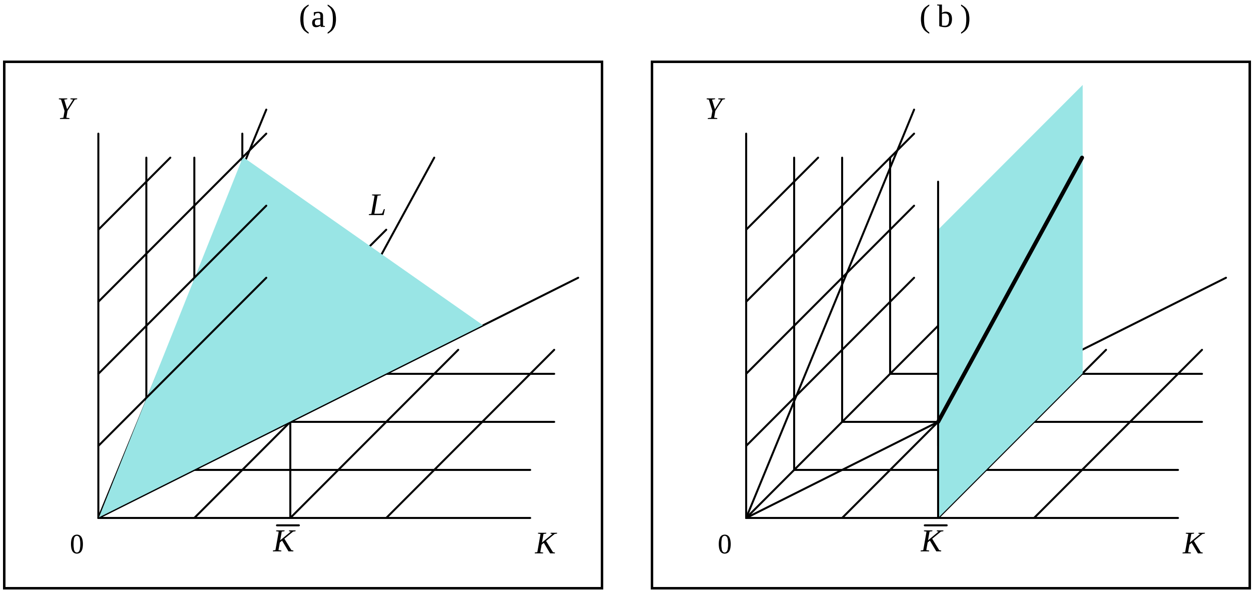
といった生産関数に直面する．

式(1)と式(2)の違いは，図に描く方が理解しやすいかもしれない．式(1)の生産関数を，ここでは，

$$F(K, L) = K + L$$

とおくことにする．これは，図 11.1 (a) に面として描かれている．このため，中長期的な生産計画の場合，経営者は (a) の色つき面上で投入・産出の組み合わせを決定する

図 11.1



短期では，生産関数は$K=\overline{K}$の制約，つまり，(b)の面の上に制約される．このため，短期の生産計画の場合，経営者は (b) の色つき面内の太線上で労働投入・産出の組み合わせを決定しなければならない．

短期における労働投入量の変更，中長期における資本・労働投入量の変更，これらが生産量にどの程度影響するのか．これは，生産関数に関して，外生変数の変化が内生変数をどの程度変化させるかを測ればよい．そのためには，多変数関数についての微分法を知る必要がある．

２．偏微分

この節以降では，多変数関数の微分を扱うことになる．しかし，多変数関数だからといって微分の概念は大きく変わるわけではなく，これまで学んだことを基本として考えれば理解できる．

微分の概念は，１変数関数においても，多変数関数においても，外生変数の微小変化に対する内生変数の変化の程度を表わすものである．ただ，多変数関数では，外生変数が２つ以上あるため，それぞれの外生変数ごとに微分を考える必要がある．

多変数関数の例として，上記の式(1)を考えよう．多変数関数$Y=F(K,L)$において，Lのみに関して微分することを「Lで偏微分する」という．これは，Kの値をパラメータと見なし（つまり変化しないものと考えて），あたかもLだけがYを決定づけるような１変数関数として微分すること―上記の式(2)をLで微分すること―である．したがって，偏微分のイメージは，一旦$K=\overline{K}$の面で生産関数を切り取り，切り取られた生産関数をLで微分するといったことである．

「$Y=F(K,L)$をKで偏微分する」および「$Y=F(K,L)$をLで偏微分する」とは，記号で，

それぞれ

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = F_K(K, L) \tag{3}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = F_L(K, L) \tag{4}$$

と表現される．ここで，“∂”は，ラウンド・デルタと呼ばれ，偏微分を示すための記号である．

例）多変数関数$Y = KL$を，KとLに関して偏微分せよ．

$Y = KL$をKで偏微分するとき，Lはパラメータ（たとえば，$L = a$）として考える．あとは，微分法のとおり，YをKで微分すればよい．

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = L$$

（仮に，$L = a$とおくと，$Y = aK$なので，$dY/dK = a$である．実際には偏微分であり，$L = a$なので，$\partial Y/\partial K = L$．）

$Y = KL$をLで偏微分するとき，Kはパラメータ（たとえば，$K = a$）として考える．あとは，微分法のとおり，YをLで微分すればよい．

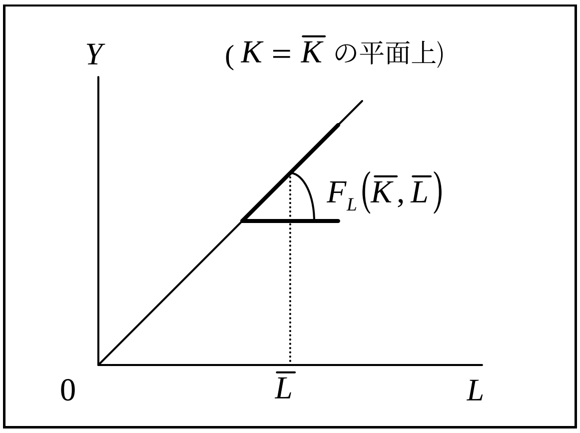
$$\frac{\partial Y}{\partial L} = K$$

練習 11.1
多変数関数$Y = K + L$を，KとLに関して偏微分せよ．

偏微分に関する微分係数を偏微分係数（または偏微係数）という．微分係数がそうであったように，偏微分係数もグラフ上の点に接線の傾きを示す．たとえば，$F(K, L) = K + L$に関して，$\left(\overline{K}, \overline{L}\right)$における偏微分係数$F_L\left(\overline{K}, \overline{L}\right)$を求めよう．これは，$F_L(K, L) = 1$より，

$$F_L\left(\overline{K}, \overline{L}\right) = 1$$

を得る．この偏微分係数は，$Y = K + L$のグラフを$K = \overline{K}$の面で切り取り―図11.1 (b)の色つき面―，さらに，その切り取られたグラフ上で$L = \overline{L}$における接線の傾きを示している．



３．全微分

多変数関数において，すべての外生変数が変化するときの微分を考えなければならない場合もある．このような場合，関数を全微分する必要がある．

全微分は，それぞれの外生変数の変化による内生変数の変化分を合計したものとして表わされる．たとえば，上記の式(1)で表わされる多変数関数に関して，全微分は，

$$dY = F_K(K,L)\,dK + F_L(K,L)\,dL \tag{5}$$

と表わされる．

式(5)は何を意味しているのかを考えてみよう．式(3)を見てほしい．記号の上での違いのみで，変化分（＝増分）は $\partial K = dK$ で同じである．よって，式(3)の両辺に ∂K を掛け合わせると，

$$\partial Y = F_K(K,L)\,dK$$

となる．この式は，dK に対する Y の変化分（＝増分）を表わす．同様に，式(4)から

$$\partial Y = F_L(K,L)\,dL$$

となる．この式は，dL に対する Y の変化分（＝増分）を表わす．したがって，これら２つの Y の変化分を加えたものが，dK と dL の両方の変化に対する y の変化分である．このため，式(5)の全微分は，上記２つの式の合計として表わされるのである．

例）関数 $Y = KL$ を全微分せよ．

$f(K,L) = KL$ とおくと，$f_K(K,L) = L$，$f_L(K,L) = K$ であるので，式(5)より，

$$dY = L\,dK + K\,dL\,.$$

練習 11.2

多変数関数$Y = K + L$**を全微分せよ．**

全微分の利用法は単なる計算にとどまらない．たとえば，分数関数

$$y = \frac{1}{x} \tag{6}$$

の微分を考えてみる．この式は，両辺にx**を掛け合わせると，**

$$xy = 1 \tag{7}$$

となる．式(7)**のように内生変数と外生変数が，それぞれ，左辺と右辺に分離されない形をとる関数のことを陰関数**（implicit function）**と呼ぶ．陰関数に関する全微分は次のように考える．式**(7)**の左辺の全微分は，**$ydx + xdy$**である．一方，右辺は定数であるので，（全）微分すると，**$(1)' = 0$**となる．よって，式**(7)**を全微分したとき，**

$$ydx + xdy = 0$$

を得る．ここで，上式を整理し，さらに式(6)**を代入することで，分数関数の微分**

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2} \quad \to \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

を求めることができる．全微分を使い，最終的にdy/dx**の形をつくることで，さまざまな微分を求めることができる．**

練習問題 11.3

次のようなマクロ経済モデル（Y**：**GDP**，**r**：利子率，**m**：実質マネーサプライ）を考える．**

$$Y = -1600r + 580$$

$$m = Y + \frac{1}{r}$$

$$Y = 500\text{，}\quad r = 0.05\text{，}\quad m = 540$$

まず，dY/dm**，**dr/dm**を求めよ．そのあと，**$dm \cong \Delta m$**と読み替え，**$\Delta m = 20$**のとき，**$\Delta Y(\cong dY)$**，**$\Delta r(\cong dr)$**を求めよ．**

練習問題 11

$\boxed{1}$ 次の文章中の空欄(1)〜(5)に，[語句]欄から適切な語句を選んで埋めよ．

> 多変数関数において，ある１つの外生変数に関して微分する―他の外生変数を（　1　）とみなす―ことを（　2　）するといい，すべての外生変数の微分（微小な増分）に対する内生変数の変化分を求めることを（　3　）するという．
>
> 投入と産出の関係を示す関数を（　4　）という．$Y = F(K, L)$のグラフを$K = \overline{K}$の面で切り取り，その切り取られたグラフ上で$L = \overline{L}$における接線の傾きは（　5　）$F_L(\overline{K}, \overline{L})$に等しい．
>
> [語句]　偏微分，全微分，パラメータ，偏微分係数，陰関数，生産関数

$\boxed{2}$ 次の多変数関数を，x，yに関して偏微分せよ．（ヒント：$(\sqrt{x})' = 1/2\sqrt{x}$）

（1）$z = x + y$　　（2）$z = xy$　　（3）$z = \sqrt{xy}$

$\boxed{3}$ 次の多変数関数に関して，偏微分係数$f_x(1,1)$，$f_y(1,1)$を求めよ．

（1）$f(x, y) = x + y$　　（2）$f(x, y) = xy$　　（3）$f(x, y) = \sqrt{xy}$

$\boxed{4}$ 次の多変数関数を全微分せよ．

（1）$z = x + y$　　（2）$z = xy$　　（3）$z = \sqrt{xy}$

$\boxed{5}$ 次のようなマクロ経済モデル（Y：GDP，r：利子率，m：実質マネーサプライ）を考える．

$$Y = -900r + 530$$

$$m = Y + \frac{1}{r}$$

$$Y = 440,\quad r = 0.1,\quad m = 450$$

まず，dY/dm，dr/dmを求めよ．そのあと，$dm \cong \Delta m$と読み替え，$\Delta m = 10$のとき，$\Delta Y (\cong dY)$，$\Delta r (\cong dr)$を求めよ．