２０１９年度　入学試験問題

（Ａ日程入学試験　２月３日）

数　学

注　意　事　項

1. 解答用紙は，中程に折り込んであります.
2. 解答用紙には，受験番号および氏名を忘れずに記入して下さい.
3. 解答は，問題ごとに解答用紙の所定の欄に記入して下さい.
4. 解答には，答えだけでなく，途中の考え方も記入して下さい.
5. 問題用紙は，1ページから4ページです.
   解答用紙は，2枚です.
   万一枚数が足りないときは，手を挙げて合図して下さい.
6. 試験終了後，問題用紙は各自持ち帰って下さい.

$\boxed{1}$　$x=\dfrac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}$ のとき，$4x^2+\dfrac{1}{x^2}-4$ の値を求めなさい．

$\boxed{2}$　２つの２次関数

$$f(x) = -x^2 + ax - 2$$

$$g(x) = x^2 - x + b$$

のグラフが，互いに接している．このとき，以下の問に答えなさい．

(1)　a と b の関係式を求めなさい．

(2)　b が最小となるときの a の値を求めなさい．

$\boxed{3}$　n を奇数とする．１から１００００までの自然数のうち，

「偶数でも n の倍数でもない」

自然数の個数が４０００個であるとき，n の値を求めなさい．

$\boxed{4}$　２次関数 $f(x)=(x-1)^2+2$ について，以下の問に答えなさい．

(1)　原点を通り，グラフ $y=f(x)$ に接する直線の方程式を求めなさい．

(2)　(1)で求めた接線とグラフ $y=f(x)$ との接点の座標をすべて求めなさい．

(3)　(2)で求めた接点を通り，接線と直交する直線（法線）の方程式をすべて求めなさい．

(4)　(3)で求めた２つの法線が交わる点の x 座標を求めなさい．

２０１９年度入学試験

数 学 解答用紙（1/2）（Ａ日程入試２月３日）

総計	
小計	

氏　名		受験番号	

1

$$x=\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2},\quad \frac{1}{x}=2\sqrt{2}-\sqrt{6}$$ なので，

$$4x^2+\frac{1}{x^2}-4=\left(2x-\frac{1}{x}\right)^2=\left\{\left(2\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)-\left(2\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)\right\}^2=\left(2\sqrt{6}\right)^2=24$$

2

(1)

２次方程式$g(x)-f(x)=2x^2-(a+1)x+b+2=0$が重解を持つようにすればよい．

判別式$D=(a+1)^2-8(b+2)=0$より，$b=\frac{1}{8}(a+1)^2-2$

(2)

(1)より、$a=-1$のとき，bは最小値－２をとる．

3

偶数の個数＝$\frac{10000}{2}=5000$

nの倍数の個数＝$\frac{10000}{n}$

$2n$の倍数の個数＝$\frac{10000}{2n}=\frac{5000}{n}$ なので，

「偶数またはnの倍数」の個数＝$5000+\frac{10000}{n}-\frac{5000}{n}$

したがって、偶数でもnの倍数でもない自然数の個数は

$$10000-\left(5000+\frac{10000}{n}-\frac{5000}{n}\right)=4000$$

これを解いて，$n=5$

２０１９年度入学試験

数 学 解答用紙（2/2）（Ａ日程入試２月３日）

氏　名		受験番号		小計	

4

(1)

接線の方程式を $y = mx$ とすると，方程式 $x^2 - 2x + 3 = mx$ が重解を持てばよい．

$x^2 - (m+2)x + 3 = 0$ より，判別式Ｄ$= (m+2)^2 - 12 = 0$

これを解いて，$m = -2 \pm 2\sqrt{3}$．したがって，求める接線の方程式は，$y = \left(-2 \pm 2\sqrt{3}\right)x$

(2)

$x^2 - 2x + 3 = \left(-2 \pm 2\sqrt{3}\right)x$ を整理すると，$x^2 \mp 2\sqrt{3}x + 3 = 0$

$\left(x \mp \sqrt{3}\right)^2 = 0$ より，$x = \pm\sqrt{3}$

このとき，$y = \left(-2 \pm 2\sqrt{3}\right)\left(\pm\sqrt{3}\right) = 6 \mp 2\sqrt{3}$

したがって，求める座標は $\left(\sqrt{3},\ 6 - 2\sqrt{3}\right)$，$\left(-\sqrt{3},\ 6 + 2\sqrt{3}\right)$

(3)

a)　$y = \left(-2 + 2\sqrt{3}\right)x$ の法線の場合

法線の傾き＝$-\dfrac{1}{-2 + 2\sqrt{3}} = -\dfrac{1 + \sqrt{3}}{4}$ なので，

法線の方程式は $y = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\left(x - \sqrt{3}\right) + 6 - 2\sqrt{3} = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}x + \dfrac{27}{4} - \dfrac{7}{4}\sqrt{3}$

b)　$y = \left(-2 - 2\sqrt{3}\right)x$ の法線の場合

法線の傾き＝$-\dfrac{1}{-2 - 2\sqrt{3}} = \dfrac{-1 + \sqrt{3}}{4}$ なので，

法線の方程式は $y = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{4}\left(x + \sqrt{3}\right) + 6 + 2\sqrt{3} = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{4}x + \dfrac{27}{4} + \dfrac{7}{4}\sqrt{3}$

(4)

$$-\frac{1+\sqrt{3}}{4}x + \frac{27}{4} - \frac{7}{4}\sqrt{3} = \frac{-1+\sqrt{3}}{4}x + \frac{27}{4} + \frac{7}{4}\sqrt{3}$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{3}x = \frac{7}{2}\sqrt{3}$$

したがって，$x = -7$