

### 第3章 命題

たとえ日本語で書かれていようと専門分野の本を読むとき，特にはじめて知る内容についての記述は，文章の論理構造をきちんと認識しないと読み違いをしてしまうことになる．本章では，文章の論理構造を理解する方法を学ぶ．

#### 1. 命題

**命題**とは，客観的に正しいか，正しくないかを判断できる文章のことをいう．命題は，主に，

「 ~ ならば - である」

の形式で表現される．「 ~ 」の部分には前提・条件が，「 - 」の部分には結論が入る．

一般に，“法則”と呼ばれるものは，命題の形式を用いて表現される．たとえば，経済学における有名な法則の1つである“需要の法則”は，

「価格が上昇すれば，需要は拡大する」

のように表わされ，前提と結論を対にした命題の形式になっている．（必ずしも客観的に判断できる内容を含んでいるとは限らないので，「命題」自体になっていない可能性もある．）

例)	「犬は動物である」	(命題)	客観的に判断可能
	「子犬がかわいい」	(命題でない)	主観的判断にもとづくため

命題は，内容が正しい場合，その命題は**真**であるといい，一方，内容が正しくない場合，その命題は**偽**であるという．真であるか，偽であるかは，客観的に判断できるものである．数学的な内容の命題では，真偽を“証明”により示すことができる．偽の場合，通常，誤りを示した例（**反例**）を挙げて，偽であることを示す．

練習 3.1 次の命題の真偽を判断せよ．但し，偽の場合，反例を挙げよ．

- (1) 犬は動物である
- (2)  $ab > 0$  ならば  $a > 0, b > 0$  である

## 2. 否定

文章の内容を打ち消すことを**否定**という。ある文章，たとえば，

「その商品の価格は100円以上である」

を否定すると，

「その商品の価格は100円未満である」

となる。

もとの文章とその否定の文章とは決して相容れない関係となる。上の例を見れば明らかのように、「100円以上」(もとの文章)と「100円未満」(否定の文章)を両方満たすような価格づけは不可能である。ここで、「第2章 集合」で利用したように、これらの言葉を記号であらわしてみよう。つまり、

$$A = \text{「100円以上」}$$

とおいてみる。このように書くとわかるだろうが、 $A$ の否定というのは、集合における補集合 $A^c$ をとることと同じである。つまり、 $A$ の否定は集合の記号を利用して、

$$A^c = \text{「100円未満」}$$

とあらわすことができる。なお、 $A$ と $A^c$ とは、当然、相容れない関係であるので、

$$A \cap A^c = \emptyset$$

が成立する。

否定で特に気をつけなければならないのは、文章中に「すべての～」や「ある～」のような言葉が使われている場合である。たとえば、

「すべての学生が試験に合格した」

の否定は、

「ある学生は試験に不合格だった」

または、より日本語らしく、

「すべての学生が試験に合格したわけではない」

(「合格しなかった学生もいる」ことがわかる)

となる。ここでの否定は、「すべての学生が試験に不合格だった」という**全否定**ではなく、一部の学生が不合格であったという**部分否定**になっていることに注意してほしい。

練習 3.2 次の文章の否定を答えなさい。

- (1) 日経平均株価は1万円未満である
- (2) すべての市場が均衡している

### 3. 逆, 裏, 対偶

命題の形式「～ならば～である」をアルファベットと記号で表現する方法を示す。“～”(前提・条件)や“～”(結論)の部分アルファベットで代用しよう。つまり,

$$A = \text{前提・条件}, B = \text{結論}$$

とおく。このとき, 命題は,

$$\text{「} A \text{ならば} B \text{」}$$

または, さらに“ならば”の部分記号“ $\Rightarrow$ ”であらわし,

$$\text{「} A \Rightarrow B \text{」}$$

のように表現することができる。

使用例を挙げておこう。命題「20歳以上ならば有権者である」は,

$$\text{「} 20 \text{歳以上} \Rightarrow \text{有権者} \text{」}$$

と表現できる。また, 命題「 $x$ の値が2以上であれば, $x$ の値は0以上である」は,

$$x \geq 2 \Rightarrow x \geq 0$$

と記号で表現することができる。

命題では, もとの命題「 $A \Rightarrow B$ 」に対して, 前提・条件と結論の部分を入れ替えた関係(逆), 前提・条件否定と結論否定の関係(裏), 前提・条件と結論を入れ替えて, なおかつそれぞれ否定にしたものどうしの関係(対偶)という概念も考える。

もとの命題	$A \Rightarrow B$	逆	$B \Rightarrow A$
裏	$A^c \Rightarrow B^c$	対偶	$B^c \Rightarrow A^c$

[図 3.1]

練習 3.3 命題「犬は動物である」の逆, 裏, 対偶を答え, さらに, それぞれ, 真偽を判断せよ。

### 4. 集合と命題

上で見てきたように, 命題は, (大文字のアルファベットを使って) 記号で表わすことができる。なおかつ, 集合の概念で捉え直すこともできる。

単純な例をあげると, 「犬は動物である」とは, 「犬」の集合に入るならば, 「動物」

の集合にも入る”ということなので、 $A = \text{「犬」}$ 、 $B = \text{「動物」}$ とおくと、

$$A \subset B$$

(「犬」は、「動物」の部分集合である)

と表現できる。犬は動物の一種類なのであるから、当然、 $A \subset B$  が成立する。したがって、この命題は“真”であると判断できる。これは、命題の記号による表現

$$A \subset B$$

と基本的に同じ意味である。

集合の説明のときにも触れたが、「 $A \subset B$ 」は、「 $A = B$ 」を意味しない。上の例でも、明らかだが、 $A = \text{「犬」}$ と $B = \text{「動物」}$ は同値ではないからである。

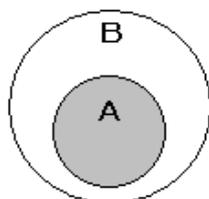
上記の通り「 $A \subset B$ 」と「 $A = B$ 」は基本的に同じ意味であるので、命題「 $A \subset B$ 」も「 $A = B$ 」を意味するわけではない。命題の場合、「 $A \subset B$ 」かつ「 $B \subset A$ 」であるとき、「 $A = B$ 」と判断できる。慣用句のように使われている「逆もまた真である」という表現は、もとの命題「 $A \subset B$ 」が真であり、かつ、その逆「 $B \subset A$ 」も真である、といているのだから、結局、「 $A = B$ 」を意味する文章なのである。

練習 3.4 次の命題において、前提・条件と結論の部分それぞれ集合として捉え、集合の記号で命題を表現しなさい。

- (1) イルカはほ乳類である
- (2) 一週間は7日間である
- (3)\*  $x > 2$ ならば $x > 0$ である

## 5. 必要条件，十分条件，必要十分条件

命題「 $A \subset B$ 」が真である場合，“ $A$ であれば $B$ になるのに十分である”，または“ $A$ は $B$ であるための十分条件である”という。上で見た通り、「 $A \subset B$ 」が真である場合、集合の概念では「 $A \subset B$ 」と表わされる。つまり、集合の概念から考えると、十分条件は，“ $A$ という集合に入っていれば、 $B$ に入る条件として十分である”と解釈できる。図では次のように表わされる。



[図 3.2]

同じ命題「 $A \Rightarrow B$ 」については、“ $B$ は $A$ であるための**必要条件**である”ともいえる。これは、集合の概念では、“ $A$ の集合に入るためには、少なくとも $B$ の集合に入っている必要がある”と言い直せる。上の図からもそのことが確認できる。

では、例を用いて確認しよう。ある命題、たとえば、

$$\text{「構造改革なくして、景気回復なし」} \quad (3.1)$$

を考えよう。この命題の前提・条件と結論の部分をもとに、

$$A = \text{「構造改革をしない」}, B = \text{「景気回復しない」}$$

とおく。この命題「 $A \Rightarrow B$ 」の対偶をとると、

$$B^c \Rightarrow A^c \quad (3.2)$$

となる。もとの命題が真であれば対偶も真である。ここで、

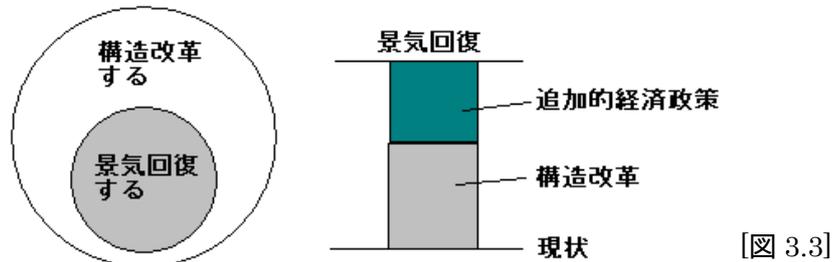
$$A^c = \text{「構造改革する」}, B^c = \text{「景気回復する」}$$

であることに注意すると、命題(3.2)に関して、

「景気回復する」は「構造改革する」の**十分条件**

「構造改革する」は「景気回復する」の**必要条件**

であるといえる。上記の議論を通して、結局、命題(3.1)は、景気回復のためには構造改革が必要であること、さらに構造改革だけでは十分でないこと（何らかの追加的な景気対策が必要であること）を述べているとわかる。



[図 3.3]

命題「 $A \Rightarrow B$ 」と「 $B \Rightarrow A$ 」がともに真であるとき、集合の概念では、 $A$ と $B$ が、

$$A \Leftrightarrow B \text{ かつ } B \Leftrightarrow A$$

と表現できる。これは、「第1章 集合」で議論したように $A$ と $B$ が同値であることを意味する。命題において、“ $A$ は $B$ であるための必要条件であり、十分条件でもある”といえる。この場合、 $A$ は $B$ であるための**必要十分条件**であるという。

練習 3.5 次の文章中の空欄に、必要条件，十分条件，必要十分条件のいずれか適切なものを入れよ。

- (1) 犬は動物であるための( )である
- (2)  $a > 0$  かつ  $b > 0$  は  $ab > 0$  であるための( )である

## 6 . 三段論法

一方の命題の結論と、他方の命題の前提・条件が同じ場合、これら2つの命題を組み合わせるにより、別の新たな命題を導き出すことができる。この方法のことを三段論法という。たとえば、

「金利が下がれば、投資は拡大する」

「投資が拡大すれば、GDPは増加する」

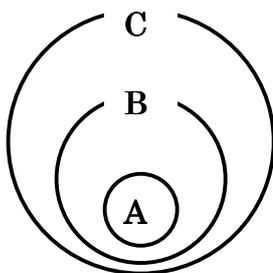
という2つの命題を組み合わせると、

「金利が下がれば、GDPは増加する」

という命題を導くことができる。この導出を記号を使って詳しく見てゆこう。まず、 $A =$ 「金利の低下」、 $B =$ 「投資の拡大」、 $C =$ 「GDPの増加」とおく。このとき、次のような命題の合成として、あらたな命題を導けることがわかるだろう。

	A	B	(「金利の低下」	「投資の拡大」)
+ )		B	C	(「投資の拡大」 「GDPの増加」)
	A		C	(「金利の低下」 「GDPの増加」)

集合の概念を使った命題の表現では、2つの命題は「 $A \rightarrow B$ 」、「 $B \rightarrow C$ 」となり、これらから「 $A \rightarrow C$ 」が導かれる。この関係は次のように図で表わすことができる。



練習 3.6 各項目中の2つの命題から三段論法で新しい命題を導出できるだろうか？できる場合、新しく導出できる命題を答えよ。できない場合、その理由を説明せよ。

- (1) 「価格が下がれば需要は拡大する」、「所得が増えれば需要は拡大する」
- (2) 「投資が増えれば景気が上向く」、「景気が上向けば消費が増える」

## 練習問題 3

- 1 次の命題の真偽を判断せよ。但し，偽の場合，反例を挙げよ。
- (1) クジラはほ乳類である
  - (2)  $x^2 > 0$  ならば  $x > 0$  である
  - (3) 需要曲線が右下がりならば価格の低下により需要が拡大する
- 2 次の文章の否定を答えよ。(より日本語らしい表現で答えよ。)
- (1) すべての学生は経済数学を履修する
  - (2) 2 の 3 乗は 10 以上である
  - (3)\* ある銘柄の株価は上昇した
- 3 次に挙げる「もとの命題」に対する，逆，裏，対偶を答えよ。
- (1)  $x^2 > 0$  ならば  $x > 0$  である
  - (2) 1 時間ならば 60 分である
  - (3) 市場が自由競争にまかされていれば，世の中うまくいく
- 4 次の文章中の空欄に，必要条件，十分条件，必要十分条件のうち，もっとも適切なものを入れよ。
- (1) 整数は自然数であるための( )である
  - (2) (日本において) 20 歳以上は成人であるための( )である
  - (3) 東京在住者は日本在住者であるための( )である
- 5 次の 2 つの命題から三段論法で新たな命題を導け。
- 「競争均衡は，誰にとっても望ましい状態である」
- 「誰にとっても望ましい状態は，パレート最適である」

